

Simulation Numérique Unidimensionnelle du Phénomène de Transfert de Chaleur, Masse et Charge dans une Pile à Combustible à Membrane Echangeuse de Protons

B. Mahmah¹, A. M'Raoui¹, H. Benmoussa², M. Belhamel¹

1. Centre de Développement des Energies Renouvelables, BP 62, route de l'observatoire bouzaréah - Alger.
email: mah2bouziane@yahoo.fr

2. Université Hadj Lakhdar de Batna, rue chahid boukhlof - Batna

Résumé - Le but de notre travail est de modéliser et d'étudier le transfert de chaleur, de masse et de charge dans une pile à combustible à membrane échangeuse de proton alimenté par de l'hydrogène. Ceci nous permet de connaître le phénomène ayant lieu à l'intérieur de la membrane, ainsi nous pouvons mieux prévoir son comportement dans différentes conditions. Nous avons ainsi établi les équations de transfert de masse, de chaleur et de transport de charge d'une membrane poreuse de type Nafion 117. Pour le transfert de chaleur, nous considérons l'effet de convection, conduction ainsi que l'effet Joule Thomson de l'échauffement de la membrane lors du passage d'un courant électrique. Pour le transfert de masse la diffusion de Fick a été considérée avec l'effet de la force électro-osmotique, et enfin pour le transport des espèces nous avons employé une équation de type Darcy pour une membrane poreuse isotrope. Nous posons ainsi deux équations aux dérivées partielles de type parabolique que nous avons résolu en discrétisant par les différences finies pour l'espace et Runge-Kutta pour l'intégration du temps. Cette procédure est très stable et donne de très bons résultats lors de la validation du code par des problèmes dont la solution est connue. La résolution de ces équations donne le profil de température et de concentration d'eau à l'intérieur de l'épaisseur de la membrane à différents instants pour des conditions opératoires déterminées, aussi le potentiel de la membrane est calculé. Les simulations effectuées nous permettent de valider nos équations différentielles et algorithmes de résolution en comparant à des autres travaux effectués dans le même domaine.

Abstract - the goal of our work is to model and study the transfer of heat, mass and load in a fuel cell with exchanging membrane of proton supplied with hydrogen. This enables us to know the phenomenon taking place inside the membrane, thus we can better envisage his behaviour under various conditions. We thus established the equations of transfer of mass, heat and transport of load of a porous membrane of type Nafion 117. For the transfer of heat, we consider the effect of convection, conduction as well as the Joule effect Thomson of the heating of the membrane at the time of the passage of an electrical current. For the mass transfer the diffusion of Fick was considered with the effect of the electro osmotic force, and finally for the transport of the species we employed an equation of the Darcy type for an isotropic porous membrane. We pose thus two partial derivative equations of parabolic type which we solved while discretizing by the differences finished for space and Runge-Kutta for the integration of time. This procedure is very stable and gives very good results during the validation of the code by problems whose solution is known. The solution of these equations gives the profile of temperature and of concentration of water inside the thickness of the membrane at various moments for determined operating conditions, therefore the potential of the membrane is calculated. Simulations carried out enable us to validate our differential equations and algorithms of resolution while comparing with the other work carried out in the same field.

Mots-clés : Pile à combustible, Hydrogène, Membrane, Modèle mathématique, Phénomène de transfert.

1. INTRODUCTION

L'hydrogène sera très probablement le vecteur énergétique du futur, son développement dépendra du progrès que connaîtront les technologies qui l'utilisent, particulièrement des piles à combustibles.

Les piles à combustibles sont une nouvelle filière électrique et thermique, dotées d'un exceptionnel rendement énergétique (indépendant du cycle de Carnot, qui est le cas de tous les procédés thermiques) ; elles sont capables de fonctionner avec plusieurs combustibles (hydrogène, méthanol, gaz naturel,...).

Dans cette étude nous développons un modèle numérique simplifié unidimensionnel d'une membrane PEMFC afin de comprendre le fonctionnement et d'optimiser les conditions opératoires. En effet le rendement d'une pile à combustible dépend considérablement de son humidité et la sécheresse de son cœur. La PEMFC est très sensible comparée aux autres piles qui travaillent à hautes températures. Pour empêcher le dessèchement et la déshydratation forte de la membrane ou le l'inondation de la cathode, il faut réaliser un équilibre. Cet équilibre est l'un des obstacles les plus difficile à surmonter.

L'eau ainsi produite par la pile à combustible peut être utilisée pour transporter la chaleur, employé pour l'humidification et le refroidissement, aussi plus simplement comme eau potable.

2. EQUATIONS GOUVERNANTES ET CONSTITUTIVES

Les équations gouvernantes et constitutives suivantes sont utilisées dans le modèle pour décrire le phénomène ayant lieu [1] :

- équation de conservation de masse
- équation de moment (Darcy)
- équation de conservation d'énergie
- équation de conservation du courant
- équation du potentiel dans le polymère
- relation linéaire de la pression transmembranaire
- relation de l'activité de l'eau dans l'anode et la cathode
- relation de l'activité de l'eau dans la membrane

2.1 Equation de conservation de masse et d'espèce :

Aussi bien pour l'eau que pour les protons l'équation de conservation de la masse est [2] :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} N_i \quad (1)$$

C_i est la concentration molaire et N_i est le flux molaire du à la convection et à l'effet électro-osmotique. Dans une solution diluée, N_i est donné par l'équation de Nernst-Planck avec la relation de Nernst-Einstein :

$$N_i = J_i + C_i u^m \quad (2)$$

où u^m est la vitesse du mélange et J_i est le flux de diffusion. Pour l'eau, le flux est exprimé par :

$$J_{H_2O} = -D_{c_{H_2O}} \frac{\partial C_{H_2O}^m}{\partial x} + n_t \frac{i_x}{F} \quad (3)$$

où

$$n_t = 2.5 \frac{I_{H_2O} \delta O_3}{22} \quad (4)$$

où

$$I_{H_2O} \delta O_3 = \frac{C_{H_2O}^m}{\frac{r^m}{M^m} - b C_{H_2O}^m} \quad (5)$$

avec $b = 00126$, coefficient d'extension de la membrane dans la direction x déterminé expérimentalement.

Le coefficient de diffusion est exprimé par la relation [3] :

$$D_{c_{H_2O}, T} = D' \left\{ \exp \left[2476 \left(\frac{1}{303} - \frac{1}{T} \right) \right] I_{H_2O} \delta O_3 \frac{1}{a} \frac{1}{1781 - 789a + 108a^2} \right\} \quad (6)$$

où a est l'activité de l'eau et D' est le coefficient de diffusion mesuré à température constante, il s'exprime par :

$$D' = 264227610^{-13} I_{H_2O} \delta O_3 \quad \text{pour } I_{H_2O} \delta O_3 \leq 123 \quad (7)$$

$$D' = 77510^{-11} I_{H_2O} \delta O_3 - 9510^{-11} \quad \text{pour } 1.23 < I_{H_2O} \delta O_3 \leq 6 \quad (8)$$

$$D' = 2562510^{-11} I_{H_2O} \delta O_3 + 2162510^{-10} \quad \text{pour } 6 < I_{H_2O} \delta O_3 \leq 14 \quad (9)$$

D' est mesuré à $30^\circ C$

le flux total d'eau est exprimé :

$$N_{H_2O} = J_{H_2O} + (C_{H_2O}^m u^m) \quad (10)$$

où u^m est donné par l'équation de moment :

$$u^m = -\frac{K k_r^s}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (11)$$

K est la perméabilité absolue du milieu poreux, k_r^s la perméabilité relative, m est la viscosité dynamique.

$$m = \frac{M_{H^+} C_{H^+}}{r} m_{H^+} + \frac{M_{H_2O} C_{H_2O}}{r} m_{H_2O} \quad (12)$$

L'équation générale de transfert instationnaire de masse est donc :

$$\frac{\partial C_{H_2O}^m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} J_{H_2O} - \frac{\partial}{\partial x} (C_{H_2O}^m u^m) \quad (13)$$

En supposant une électroneutralité de la membrane et une distribution uniforme de des charges, le transfert de proton se simplifie :

$$\frac{\partial C_{H^+}}{\partial x} = 0, \frac{\partial C_{H^+}}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

donc, quand un courant traverse la membrane la concentration de proton reste constante.

2.2 Conservation de l'énergie :

L'énergie est transportée par convection et conduction. l'effet des pertes ohmiques dans la membrane est pris en considération en ajoutant un terme source dans les bilans.

$$\overline{rc_p} \frac{\partial T}{\partial t} = I_m \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \overline{Mc_p N} \frac{\partial T}{\partial x} + R_m \quad (15)$$

où

$$\overline{rc_p} = r_s^m c_{p_m} + r_{H_2O}^m c_{p_{H_2O}} + r_{H^+}^m c_{p_{H^+}} \quad (16)$$

avec

$$r_{H^+}^m = M_{H^+} C_{H^+} \text{ et } r_{H_2O}^m = M_{H_2O} C_{H_2O} \quad (17)$$

$$\overline{Mc_p N} = M_{H_2O} c_{p_{H_2O}}^m N_{H_2O} + M_{H^+} c_{p_{H^+}}^m N_{H^+} \quad (18)$$

en développant les termes nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{Mc_p N} &= M_{H_2O} c_{p_{H_2O}}^m \left(C_{H_2O}^m u^m - D_{c_{H_2O},T} \frac{\partial C_{H_2O}^m}{\partial x} + 2.5 \frac{I_{H_2O} s_{O_3}}{22} \frac{i_m}{F} \right) \\ &+ M_{H^+} c_{p_{H^+}}^m \left(C_{H^+}^m u^m - \frac{F}{RT} D_{H^+} C_{H^+}^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Dans l'équation d'énergie I_m représente le coefficient de conductivité de la membrane et est supposé constant. le terme source R_m est donné par

$$R_m = \frac{i_x^2}{s_m} \quad (20)$$

où s_m est la conductivité de la membrane, elle est fonction de la température et de la contenance en eau :

$$s_m = s_{m_{303}} \exp \left(1268 \left(\frac{1}{303} - \frac{1}{T} \right) \right) \quad (21)$$

avec $s_{m_{303}}$ la conductivité de la membrane à 303 K :

$$s_{m_{303}} = 100 \left(0.005139 I_{H_2O} s_{O_3} - 000326 \right) \text{ pour } I_{H_2O} s_{O_3} > 1 \quad (22)$$

2.3 Conservation du courant :

La supposition d'un nombre fixe et uniforme de charges dans la membrane en plus de l'hypothèse d'électroneutralité donne la relation suivante :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

2.4 Loi d'Ohm :

L'équation du potentiel de proton dérivé à partir de la loi d'Ohm,

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x} = - \frac{i_x}{s_m} + \frac{F}{s_m} C_{H^+} u^m \quad (24)$$

les deux termes représentent le flux de protons divisé par la conductivité de la membrane.

2.5 Activité de l'eau à l'interface :

L'activité de la vapeur d'eau à l'interface de la membrane

$$a = \frac{RT}{P_{sat}(T)} C_{H_2O}^g + 2s \quad (25)$$

où $C_{H_2O}^g$ est la concentration en vapeur d'eau et s est le ratio de saturation.

2.6 Activité de l'eau dans la membrane :

La relation de l'activité d'eau dans la membrane est donnée pour $I_{H_2O/SO_3} \leq 14$:

$$a = \frac{1}{2160} \left(c_1 + c_2 I_{H_2O/SO_3} + 216 \left(c_3 - c_4 I_{H_2O/SO_3} + c_5 I_{H_2O/SO_3}^2 \right)^{1/2} \right)^{1/3} - \frac{134183}{2160} \left(c_1 + c_2 I_{H_2O/SO_3} + 216 \left(c_3 - c_4 I_{H_2O/SO_3} + c_5 I_{H_2O/SO_3}^2 \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \frac{797}{2160} \quad (26)$$

avec :

$$c_1 = -4195610^4 \quad c_2 = 13996810^3 \quad c_3 = 38248210^6 \quad c_4 = 25173910^3 \quad c_5 = 41990410^6$$

pour $14 \leq I_{H_2O/SO_3} < 168$

$$a = 0.7143 \left(I_{H_2O/SO_3} \right) - 90021 \quad (27)$$

pour $I_{H_2O/SO_3} > 168$

$$a = 3 \quad (28)$$

2.7 Conditions initiales et aux limites :

2.7.1 Concentration d'eau :

L'équation de transport d'espèce nécessite une condition initiale et deux conditions aux limites. Les conditions aux limites traduisent l'équilibre de la membrane avec les canaux extérieurs [4].

$$a = \left(\frac{RT}{P_{sat}} C_{H_2O}^g \right) \quad (29)$$

$$P_{sat} = P_0 \exp \left(\frac{\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) L_v M_{H_2O}}{R} \right) \quad (30)$$

ayant l'activité à l'interface on peut calculer la concentration d'eau dans la membrane :

$$C_{H_2O}^m = I_{H_2O/SO_3} \frac{r_{dry}^m}{M^m} \frac{1}{1 + b I_{H_2O/SO_3}} \quad (31)$$

où I_{H_2O/SO_3} est une fonction de l'activité :

$$I_{H_2O/SO_3} = 0.043 + 1.781a - 39.85a^2 + 36a^3 \quad \text{pour } a < 1 \quad (32)$$

$$I_{H_2O/SO_3} = 14 + 1.4(a - 1) \quad \text{pour } 1 \leq a < 3 \quad (33)$$

$$I_{H_2O/SO_3} = 168 \quad \text{pour } 3 \leq a \quad (34)$$

Ces équations sont valables pour l'anode et la cathode.

En condition initiale nous supposons un profil linéaire de concentration d'eau dans la membrane.

2.7.2 Température :

- Aux deux extrémités de la membrane le flux de chaleur est continu
- Comme condition initiale le profil de température est supposé linéaire.

3. DISCRETISATION ET RESOLUTION DES EQUATIONS

Pour la discrétisation des équations nous appliquons la méthode des différences finies pour discrétiser les équations de transfert de chaleur, de masse et de charge dans la membrane [5] :

c'est ainsi que l'épaisseur de la membrane est subdivisée en N parties de longueur $h = \frac{e_m}{N}$, les variables (concentration d'eau, température et potentiel) sont indicés i à l'épaisseur $\frac{i}{N} e_m$:

$$\frac{\partial C_{H_2O}^m}{\partial x} = \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 C_{H_2O}^m}{\partial x^2} = \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{2h^2} \quad (36)$$

Pour intégrer le temps la méthode de Rosenbrok [6] a été utilisée. Cette méthode a été développée pour la résolution des équations aux dérivées ordinaires couplées à des équations stationnaires :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ 0 = g(y, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} \quad (37)$$

Cette méthode est particulièrement intéressante dans notre cas, car l'intégration des conditions aux limites au système se trouve simplifiée.

L'algorithme de la méthode est (modifié pour minimiser les multiplications matrice-vecteur) :

$$g_i = \sum_{j=1}^i g_{ij} \quad k_j, i = 1, 2, 3 \quad (38)$$

$$\left[\frac{1}{hg_{ii}} - f_y(y_0) \right] g_i = f\left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} l_j\right) + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} g_j \quad (39)$$

$$y = y_0 + \sum_{j=1}^5 b_j g_j \quad (40)$$

$$erreur = \sum_{j=1}^5 e_j g_j \quad (41)$$

Les coefficients modifiés sont montrés sur le tableau 1.

Tableau 1. Les coefficients modifiés de Rosenbrok

$\gamma_{ii} = 0.70751226521$		$c21 = -3.63326053462389$	
$A21 = 1.7431660785498158$	$a31 = 1.7579017655282058$	$c31 = 0.938696130300008$	$c32 = 0.721836680650608$
$A32 = 0.324510381109478$	$a41 = -0.94992114354596$	$c41 = -0.52072207237825$	$c42 = 1.828407976356378$
$A42 = -1.498344529363487$	$a43 = 1.3685269893801974$	$c43 = 2.49656139930207998$	
$A51 = 0.2041384938123241$	$a52 = -1.3873299760993895$	$c51 = -1.982968389837558$	$c52 = -0.36131551858941$
$A53 = -1.3224986830735241$	$a54 = 1.13219450989902394$	$c53 = -0.6513230147196917$	$c54 = -0.0371742610718$
$B1 = 1.66894658736166881$	$b2 = -0.41408541895711873$	$a2X = 1.233311380872013$	$a3X = 0.883140456150$
$B3 = -0.54183519274744652$	$b4 = 0.481916868070299575$	$a4X = 0.1582199030915999$	$a5X = 0.977573011661$
$B5 = 1.238614368590399747$		$e1 = -0.8341648855214810$	$e2 = -0.96830990911354$
$C1X = 0.70751226521$	$c2X = -1.111202060046271$	$e3 = -0.68361428310536927$	$e4 = 0.55891536528928$
$C3X = 0.6098986509086733$	$c4X = 0.086671290012213$	$e5 = 0.41252114922082496$	
$C5X = -0.28437951602537$			

4. RESULTATS DE SIMULATION

Les simulations nous permettent d'obtenir le profil de température et de concentration d'eau à l'intérieur de la membrane en fonction du temps et de la position x dans la membrane.

Nous avons fait varier la pression transmembranaire de -2 bars à 4 bars, une pression négative indique que la pression du coté anodique est plus importante que celle du coté cathodique, aussi nous avons fait varier la température de la membrane de 30 °C à 90 °C, et le courant de 0.01 A/cm² à 0.8 A/cm².

Ces simulations nous ont permis d'obtenir les courbes suivantes :

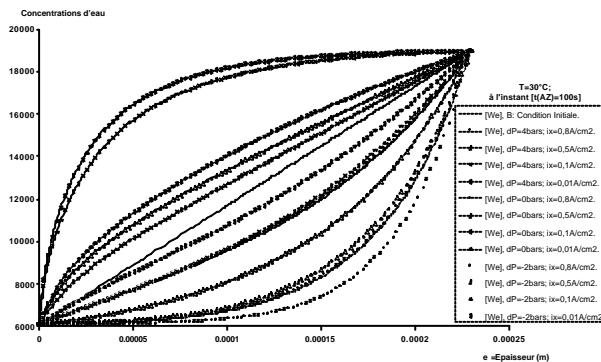


Fig. 1 : Les variations des concentrations d'eau à travers l'épaisseur [e] de la membrane à T= 30°C

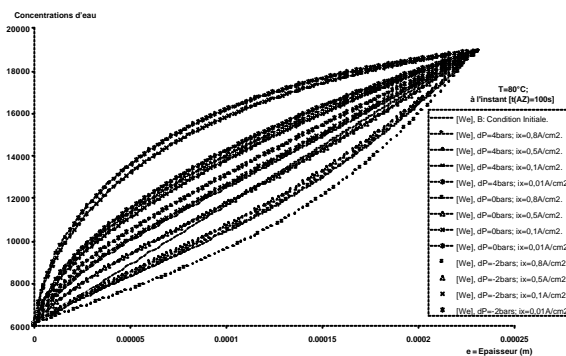


Fig. 2 : Les variations des concentrations d'eau à travers l'épaisseur [e] de la membrane à T= 80°C

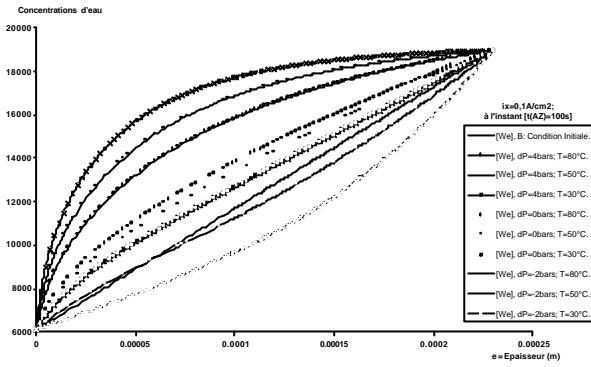


Fig. 3 : Les variations des concentrations d'eau à travers l'épaisseur [e] de la membrane à $i_k=0,1 \text{ A/cm}^2$

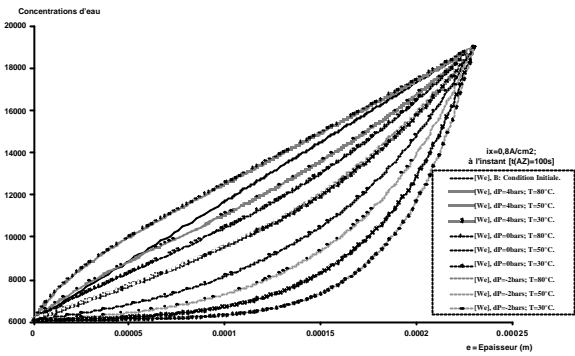


Fig. 4 : Les variations des concentrations d'eau à travers l'épaisseur [e] de la membrane à $i_k=0,8 \text{ A/cm}^2$

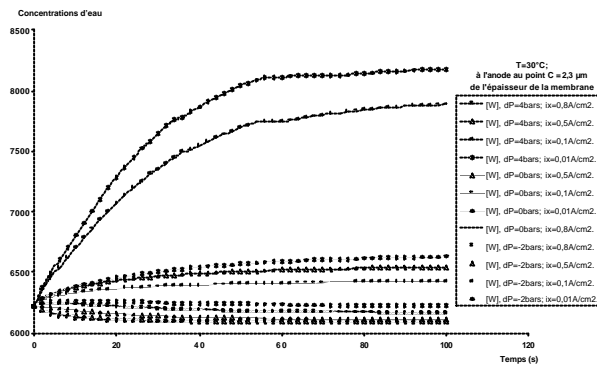


Fig. 5 : L'évolution des concentrations d'eau à l'Anode au point $C = 2,3 \mu\text{m}$ de l'épaisseur de la membrane dans le temps à $T=30^\circ\text{C}$;

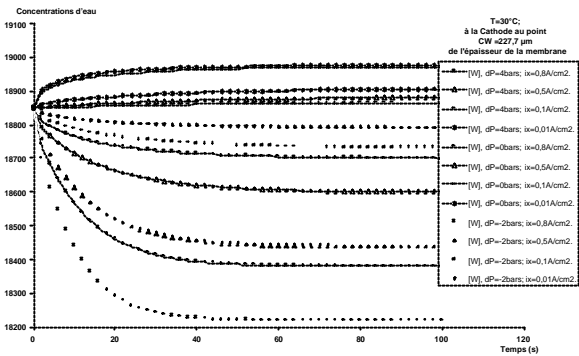


Fig. 6 : L'évolution des concentrations d'eau à la Cathode au point $CW = 227,7 \mu\text{m}$ de l'épaisseur de la membrane dans le temps à $T=30^\circ\text{C}$;

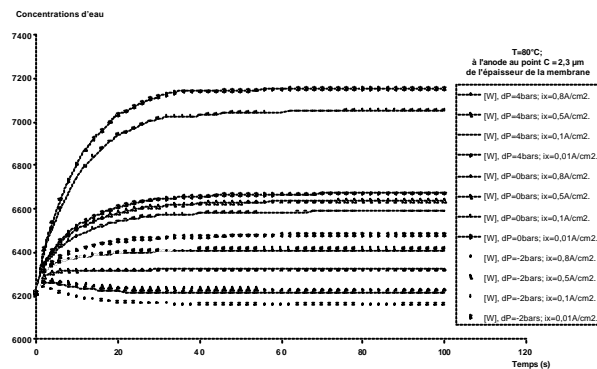


Fig. 7 : L'évolution des concentrations d'eau à l'Anode au point $C=2,3 \mu\text{m}$ de l'épaisseur de la membrane dans le temps à $T=80^\circ\text{C}$;

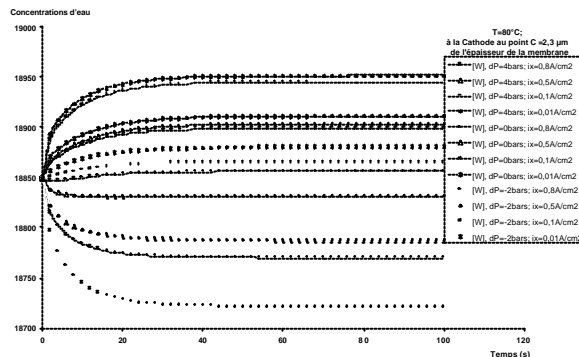


Fig. 8 : L'évolution des concentrations d'eau à la Cathode au point $CW = 227,7 \mu\text{m}$ de l'épaisseur de la membrane dans le temps à $T=80^\circ\text{C}$;

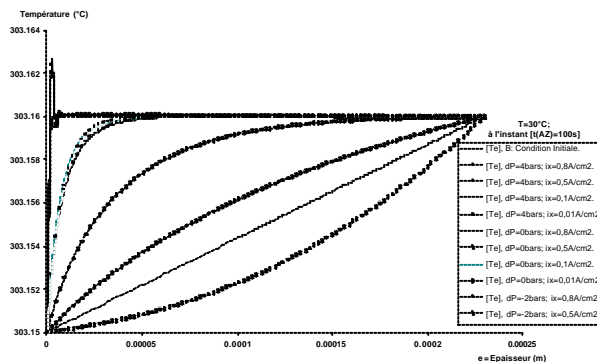


Fig. 9 : les profils de la température à travers de l'épaisseur de la membrane à $T=30^\circ\text{C}$ au temps $t=100\text{s}$

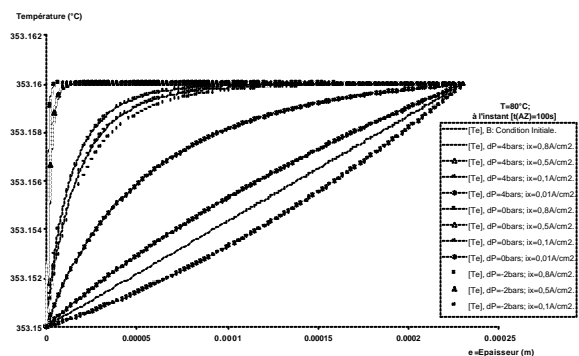


Fig. 10 : les profils de la température à travers de l'épaisseur de la membrane à $T=80^\circ\text{C}$ au temps $t=100 \text{ s}$;

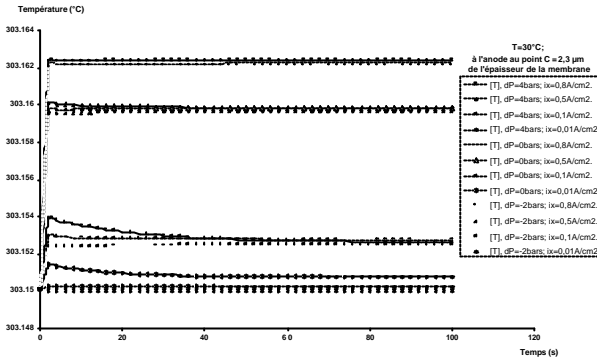


Fig. 11 : les profils de la température à l'anode au point C =2,3 μm d'épaisseur de la membrane à T=30°C;

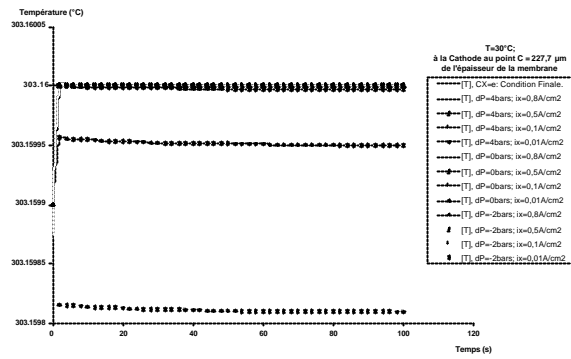


Fig. 12 : les profils de la température à la Cathode au point C =227,7 μm de l'épaisseur de la membrane à T=30°C;

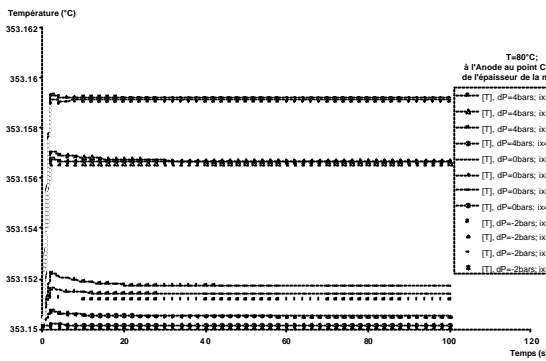


Fig. 13 : les profils de la température à l'anode au point C =2,3 μm d'épaisseur de la membrane à T=80°C;

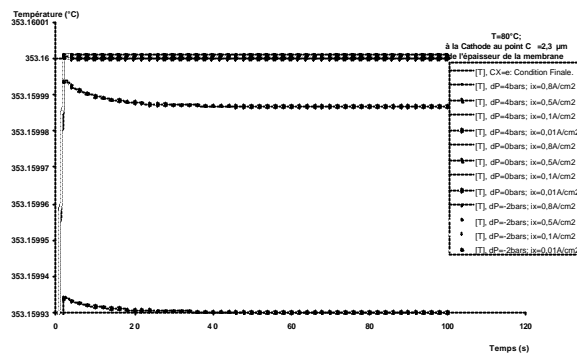


Fig. 14 : les profils de la température à la Cathode au point C =227,7 μm de l'épaisseur de la membrane à T=80°C;

5. INTERPRETATION ET CONCLUSION

Les courbes obtenues nous permettent de connaître l'influence des différents paramètres sur le profil interne de température et concentration d'eau dans la membrane. Nous observons ainsi que plus la pression transmembranaire augmente plus la concentration d'eau augmente dans la membrane, l'hydratation de celle-ci est très importante pour son fonctionnement. Un dessèchement de la membrane provoque sa détérioration. Nous observons aussi que plus le courant augmente plus la concentration diminue. La température a une influence moindre. Pour un bon fonctionnement de la membrane il est donc nécessaire d'augmenter la pression si le courant est important. Une pression cathodique plus importante que la pression anodique est préférable. La membrane fonctionne mieux à haute température si le courant est élevé, on observe sur les courbes de températures des faibles températures une singularité qui prouve que le refroidissement de la membrane est difficile.

Ces simulations nous ont permis de comprendre le fonctionnement de membrane de la pile à combustible. Les résultats obtenus sont comparables aux travaux effectués dans le même domaine. Nous fixons comme objectifs dans les prochains travaux d'étudier le refroidissement de la membrane, nous pourrions ainsi optimiser son fonctionnement et connaître ces possibilités énergétiques en plus des avantages électriques.

NOMENCLATURE

a	activité	R_m	résistance ohmique de la membrane, W/m^2
C_i	concentration de i , mol/m^3	R	constante universelle des gaz parfait $J/mol.K$
C_i^a	concentration de i dans la phase a , kg/m^3	s	ratio de saturation
c_{p_i}	chaleur spécifique de i , $J/kg.K$	t	temps, s
D_i	coefficient de diffusion de i , cm^2/s	T	température, K
D'	coefficient de diffusion à température const., cm^2/s	T_0	température de référence, K
F	constante de Faraday	Φ_m	potentiel électrique de la membrane, V
i_x	courant de proton dans la direction x , A/m^2	I	conductivité thermique, W/mK

J_i	Flux de diffusion de i , $mol/m^2 s$	$I_{H_2SO_3}$	contenance de la membrane en eau, mol_{H_2O}/mol_s
k_r^g	perméabilité relative de la phase gaz	\mathbf{m}	viscosité dynamique, kg/ms
K	perméabilité absolu, m^2/s	\mathbf{r}	densité, kg/m^3
M_i	masse moléculaire de i , kg/mol	\mathbf{S}	conductivité électrique, S/m
N_i	Flux de i	indices	
n_i	coefficient d'entraînement	m	membrane
p_0	pression de saturation de référence, Pa	g	gaz
p^a	pression de la phase a	H_2O	eau
p_{sat}	pression de saturation Pa	H^+	proton

RÉFÉRENCES

- [1] Eaton B. M., “*One Dimensional, Transient Model of Heat, Mass, and Charge Transfer in a Proton Exchange Membrane*”, Master Thesis of Science in Mechanical Engineering, Faculty of the Virginia Polytechnic and State University, (2001).
- [2] Bird R. B., Stewart W. E., and Lightfoot E. N., “*Transport Phenomena*”, Wiley International Edition, New York (1960).
- [3] Springer T.E., Wilson M.S., and Gottesfeld S., “*Modeling and Experimental Diagnostics in polymer Electrolyte Fuel Cells*” Journal of Electrochemical Society, Vol 140, No 12 (1993) pp. 3513-3526.
- [4] Sukkee Um., Wang C.-Y., and Chenb K. S., “Computational Fluid Dynamics Modeling of Proton Exchange Membrane Fuel Cells”, Journal of The Electrochemical Society, Vol. 147, No. 12 (2000) pp. 4485-4493
- [5] Press W.H., Teukolsky A.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P. “*Numerical Recipes in Fortran 77, The Art of Scientific Computing*”, Cambridge University Press, New York (1996).
- [6] Roche M., “Rosenbrock Methos for Algebraic Equations”; Numerish Mathematik 50 (1988) pp. 45-63.