

## Simulation Numérique du Problème de Frontière Mobile lors d'un Processus de Fusion Commandé par la Convection Naturelle dans le Liquide et la Conduction dans le Solide

Y. Jallouli<sup>1</sup>, R. Chouikh<sup>1</sup>, A. Guizani<sup>1</sup>, A. Belghith<sup>2</sup> et M. Maalej<sup>1</sup>

<sup>1</sup> INRST / LAS, B.P. 95, 2050 Hammam Lif, Tunisie

<sup>2</sup> Faculté des Sciences, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie

**Résumé** - L'accumulation de l'énergie à basse température et sa restitution se présente dans la plupart des phénomènes et des systèmes thermodynamiques. En particulier, le stockage du froid par chaleur latente a pour avantage de mieux gérer l'économie de l'énergie (réduction des puissances installées, réalisation de gains d'exploitation sur le coût de l'électricité, une fiabilité de la production frigorifique...). Ce procédé de stockage qui entre dans le cadre de la maîtrise de l'énergie, associé principalement aux installations de conditionnement d'air et de froid industriel, utilise la transformation solide-liquide de matériaux à changement de phase encapsulés dans des cellules appelées nodules.

Les limites d'efficacité de ce procédé sont imposées par la cinétique des transferts thermiques et massiques. Dans ce contexte, nous présentons une méthode de résolution numérique d'un problème où l'un des frontières du domaine se déplace en fonction du temps et dans lequel la fusion résulte du couplage entre la conduction dans la phase solide et la convection dans la phase liquide. La frontière mobile est rendue fixe par un changement de coordonnées. Cette étude est basée sur la résolution de l'équation de l'interface solide-liquide, des équations complètes de Navier-Stokes et de l'énergie à partir d'une procédure numérique elliptique en utilisant une formulation  $\Psi, \omega$  et en adoptant une méthode de discrétisation par volumes finis. Le schéma de discrétisation utilisé est adapté au système de coordonnées transformées associé à l'immobilisation de la frontière. Les résultats montrent que le front de fusion se stabilise à une position bien déterminée quand le régime stationnaire est atteint et la matrice solide supérieure se conserve.

**Mots clés:** Stockage du froid - Matériaux à changement de phase 'MCP' - Interface solide-liquide - Pseudoconvection.

### 1. INTRODUCTION

De nombreux équipements de climatisation ont été installés et la consommation d'énergie électrique s'en est ressentie [1-4]. Ainsi, l'idée de stocker le froid par chaleur latente apparaît opportun en dehors des heures de pointe, et résout en partie le problème de la surconsommation de l'électricité. Le stockage par chaleur latente d'une manière générale "stockage de la chaleur ou du froid" a fait l'objet de plusieurs études, ces dernières années [5-8]. Les études théoriques concernent surtout l'élaboration de modèles du processus de fusion adaptés à la géométrie du stock. Parmi les résultats, on a mis en évidence qu'au début du processus de fusion le régime conducteur gère les transferts thermiques dans la phase liquide et ce n'est qu'après un certain temps, la convection naturelle démarre et le front de fusion commence à se déformer. Quant aux études expérimentales, elles s'intéressent principalement à la mise au point d'échangeurs à stockage latent.

Bénard et al. [9] ont présenté une analyse du changement d'état solide-liquide en géométrie rectangulaire. Ces auteurs ont précisé les hypothèses qui permettent d'évaluer l'ordre de grandeur de chacun des paramètres régissant le problème (vitesse de front de fusion, vitesse de la convection, temps caractéristiques...) et ont montré que les écoulements convectifs ne sont pas influencés par le mouvement de l'interface. Des expériences ont permis de valider le modèle numérique proposé.

Parmi les études expérimentales, nous citons celle de Bedecarrats et al. [10]. Ces auteurs ont étudié la cristallisation d'un MCP contenu dans des nodules sphériques remplissant une cuve placée dans une boucle frigorifique. Ils proposent un modèle qui peut déterminer la durée de cristallisation des nodules, la durée du palier de température et le temps nécessaire pour cristalliser tous les nodules. Le modèle proposé, est transposable à n'importe quel MCP et n'importe quelle dimension de nodules à condition de bien connaître les caractéristiques thermophysiques et la probabilité de cristallisation par unité de temps.

Le présent travail consiste à présenter une méthode de résolution numérique du problème de changement d'état solide-liquide en géométrie rectangulaire où la fusion résulte du couplage entre la conduction dans la phase solide et la convection dans la phase liquide.

La modélisation mathématique envisagée traite trois régions : liquide, interface et solide. Dans le liquide, nous résolvons le système d'équations couplées de Naviers-Stockes, à l'interface on applique un bilan énergétique où on tient compte de la conduction, et dans la matrice solide nous utilisons l'équation de l'énergie.

La méthode de résolution utilisée rend fixe la frontière mobile à l'aide d'un changement de coordonnées adapté et utilise un schéma de discrétisation par volumes finis.

## 2. MODELISATION

### 2.1 Configuration géométrique

La configuration adoptée est un bloc de glace d'une hauteur  $H$ , d'une longueur  $L$  et d'une profondeur infinie (Fig. 1). On choisit comme coefficient de forme : rapport de la longueur sur la hauteur  $L/H$  très grand pour réduire les déformations du front de fusion dû à la convection.

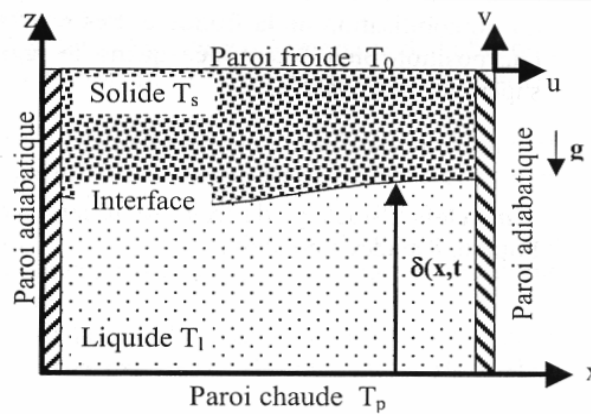


Fig. 1: Configuration géométrique

### 2.2 Les hypothèses simplificatrices

Nous adoptons les hypothèses suivantes :

- Fluide Newtonien obéissant à l'approximation de Boussinesq.
- Le processus de fusion est bidimensionnel, et l'écoulement est laminaire dans le liquide.
- Les propriétés thermophysiques sont constantes dans la gamme de températures utilisées.
- La convection naturelle n'est pas influencée par le mouvement du front de fusion.
- Pendant le pas de temps  $\Delta t$  de résolution des équations, on admet que le front de fusion reste fixe et la convection naturelle est stationnaire dans le liquide.
- Dans la phase solide, on conserve le régime transitoire dans l'équation de l'énergie.
- Durant le pas de temps  $\Delta t$ , une certaine quantité de masse semble passer à travers la surface du volume de contrôle. A ce transport de masse, est associé un transport d'énergie, exprimé sous la forme d'un terme additif dans l'équation de l'énergie relative à la phase solide. C'est la pseudo-convection.
- L'écriture des équations est simplifiée en négligeant les termes croisés dus à la non orthogonalité de la transformation de coordonnées. L'erreur commise sur les calculs du flux de chaleur à l'interface est négligée lorsque l'inclinaison et la courbure de l'interface sont faibles lorsqu'on choisit un grand rapport de forme.

### 2.3 Mise en équation

Les équations de conservation sont écrites pour le domaine considéré. Ainsi cinq équations sont obtenues : équation de conservation de la masse, équation de quantité de mouvement, équation de conservation de l'énergie et équation de l'interface solide-liquide. Ces équations sont rendues adimensionnelles à l'aide des variables et paramètres suivants :

$$x^* = \frac{x}{H \cdot Ra^{1/2}} \quad z^* = \frac{z}{H \cdot Ra^{1/2}} \quad u^* = \frac{u \cdot H}{\alpha_l \cdot Ra^{1/4}} \quad v^* = \frac{v \cdot H}{\alpha_l \cdot Ra^{1/4}}$$

$$T_l^* = \theta_l = \frac{T - T_f}{T_p - T_f} \quad T_s^* = \theta_s = \frac{T - T_f}{T_f - T_0} \quad \omega^* = \omega \frac{H^2 \cdot Ra^{1/2}}{\alpha_l}$$

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{\alpha_l \cdot Ra^{3/4}} \quad Pr = \frac{\nu_l}{\alpha_l} \quad Ra_a = \frac{\beta g (T_p - T_f) H^3}{\nu_l \cdot \alpha_l} = Gr \cdot Pr$$

$$\Delta S_1 = \frac{T_f - T_0}{T_p - T_f} \quad t^* = \frac{t \cdot v_1}{H^2} \quad \alpha^* = \frac{\alpha_s}{\alpha_1} \quad k^* = \frac{k_s}{k_1} \quad \rho^* = \frac{\rho_s}{\rho_1}$$

$$Ste = \frac{C_{pl} (T_p - T_f)}{L_f} \quad Ste^* = \frac{Ste}{\rho^*} \quad \alpha_1 = \frac{k_1}{\rho_1 \cdot C_{pl}} \quad A = \frac{H}{L}$$

### 2.3.1 Transformation des coordonnées

La notion d'immobilisation de la frontière est un passage à la configuration linéaire, par une transformation des coordonnées (Fig. 2) adaptée. Ainsi, une transformation de coordonnées est utilisée pour linéariser la frontière mobile.

\* Phase liquide :  $X_1 = x^*$  ;  $Z_1 = z^* / \Delta$

\* Phase solide :  $X_1 = x^*$  ;  $Z_s = \frac{z^* - \delta^*}{H^* - \delta^*} = \frac{z^* - \delta^*}{H^* - A \cdot \Delta}$  avec  $\delta^* = \Delta \cdot L / H = A \cdot \Delta$

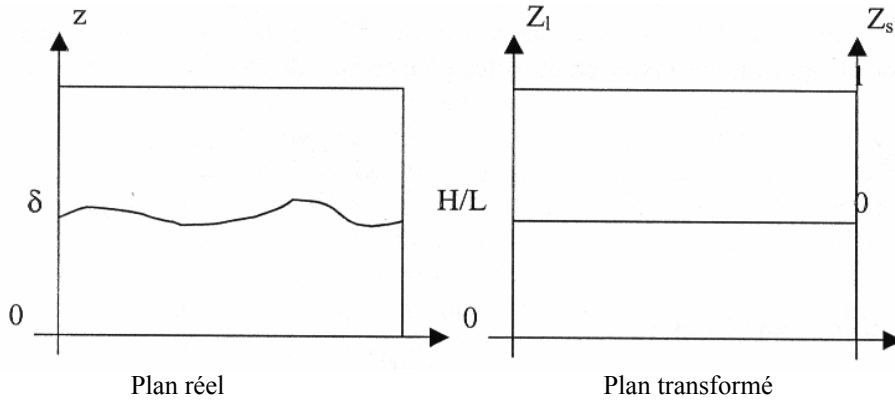


Fig. 2: Transformation des coordonnées

### 2.3.2 Equations finales

#### Phase liquide

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X_1^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Z_1^2} = -\omega^*$$

$$\frac{\partial(u^* \omega^*)}{\partial X_1} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(v^* \omega^*)}{\partial Z_1} = \frac{\text{Pr}}{R_a^{3/4}} \left( \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial X_1^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial Z_1^2} \right) + R_a \cdot \text{Pr} \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial(u^* \theta_1)}{\partial X_1} + \frac{\partial(v^* \theta^*)}{\partial Z_1} = \frac{1}{R_a^{3/4}} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial Z_1^2} \right)$$

#### Phase solide

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t^*} = \frac{\alpha^*}{\text{Pr} \cdot R_a} \left\{ \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial X_s^2} + \left[ \left( \frac{A}{H^* - A \cdot \Delta} Z_s \frac{\partial \Delta}{\partial X_s} \right)^2 + \left( \frac{1}{H^* - A \cdot \Delta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial Z_s^2} + 2 \frac{A}{H^* - A \cdot \Delta} Z_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial X_s \partial Y_s} \right\}$$

terme croisé dû au Jacobien

$$+ \frac{A}{H^* - A \cdot \Delta} Z_s \frac{\partial \Delta}{\partial t^*} \frac{\partial \theta_s}{\partial Z_s}$$

terme de pseudo-convection

### Interface solide - liquide

$$\left[ 1 + \left( \frac{\partial \delta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] \left[ k^* \cdot \Delta S_L \frac{1}{H^* - A \cdot \Delta} \left( \frac{\partial \theta_s}{\partial Z_s} \right)_{Z_s=1} - \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial \theta_l}{\partial Z_l} \right)_{Z_l=\frac{H}{L}} \right] = \frac{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}{\text{Ste}^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*}$$

On définit le Nusselt liquide  $Nu_l$  et le Nusselt solide  $Nu_s$  rapportés au déplacement de l'interface. Nous allons déterminer l'expression du Nusselt à partir de l'équation de l'interface liquide-solide :

$$k^* \cdot \Delta S_L Nu_s - Nu_l = \frac{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}{\text{Ste}^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*}$$

On déduit alors, l'expression du Nusselt dans les phases liquide et solide :

$$Nu_s = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \delta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{H^* - A \cdot \Delta} \left( \frac{\partial \theta_s}{\partial Z_s} \right)_{Z_s=1} ; \quad Nu_l = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \delta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial \theta_l}{\partial Z_l} \right)_{Z_l=\frac{H}{L}}$$

### 2.3.3 Les conditions aux limites

\* Les parois latérales ( $x = 0$ ,  $x = L$ ) sont adiabatiques  $\frac{\partial \theta_l}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial \theta_s}{\partial x} = 0$  et on adopte la condition d'adhérence  $\psi^* = 0$ .

- \* Sur la paroi inférieure ( $z = 0$ ) :  $T_l = T_p$ , donc  $\theta_l = 1$ .
- \* Au niveau de l'interface ( $z = \delta$ ) :
  - Dans la phase liquide :  $T_l = T_f$ , donc  $\theta_l = 1$ .
  - condition d'adhérence :  $\psi^* = 0$ .
  - Dans la phase solide :  $T_s = T_f$ , donc  $\theta_s = 1$ .
- \* Sur la paroi supérieure ( $z = H$ ) :  $T_s = T_0$ , donc  $\theta_s = -1$ .

## 2.4 Méthode de résolution

### 2.4.1 La discrétisation des équations

On note  $\Phi$  la variable scalaire qui représente chacun des termes à résoudre. La modélisation numérique fait appel à la méthode des volumes finis.

On obtient pour toutes les équations de conservation, après discrétisation, le système linéaire suivant :  $A P \cdot \phi P = A E \cdot \phi E + A W \cdot \phi W + A N \cdot \phi N + A S \cdot \phi S + A O P \cdot \phi O P + S \phi \cdot \Delta x \cdot \Delta z$

Pour l'équation du front de fusion, on obtient :

$$\delta^* \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*} = \frac{\text{Ste}^*}{\text{Pr} \cdot \text{Ra}} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \delta_0^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] \left[ k^* \cdot \Delta S_L \frac{1}{H^* - A \cdot \Delta} \left( \frac{\partial \theta_s}{\partial Z_s} \right)_{Z_s=1} - \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial \theta_l}{\partial Z_l} \right)_{Z_l=\frac{H}{L}} \right] \cdot \Delta t + \delta_0^*$$

### 2.4.2 Méthode et procédure de résolution

Le système d'équations qui régit le processus de fusion est linéarisé par la méthode de discrétisation par volumes finis. Le couplage entre le champ dynamique et le champ thermique dans les équations de la convection naturelle dans la phase liquide est surmonté par une procédure itérative. Il s'agit alors de résoudre un système d'équations linéaires pentagonales à chaque étape de la procédure itérative.

Lorsque la fusion débute, le régime conductif monodimensionnel gère les échanges thermiques dans la phase liquide. Une fois que la convection naturelle démarre, le processus de fusion devient bidimensionnel.

## 3. RESULTATS

Les résultats numériques sont donnés pour une enceinte parallélépipédique contenant un matériau à changement de phase porté à la température de fusion  $T_f$  et de rapport de forme  $A = 2,8$ . Les deux parois verticales ont adiabatiques alors que les parois horizontales supérieure et inférieure sont protégées respectivement à

la température  $T_0 < T_f$  et  $T_p > T_f$ . On suppose que la fusion débute à l'instant  $t = 0$  s. Le matériau à changement de phase choisi est le n-octadécane.

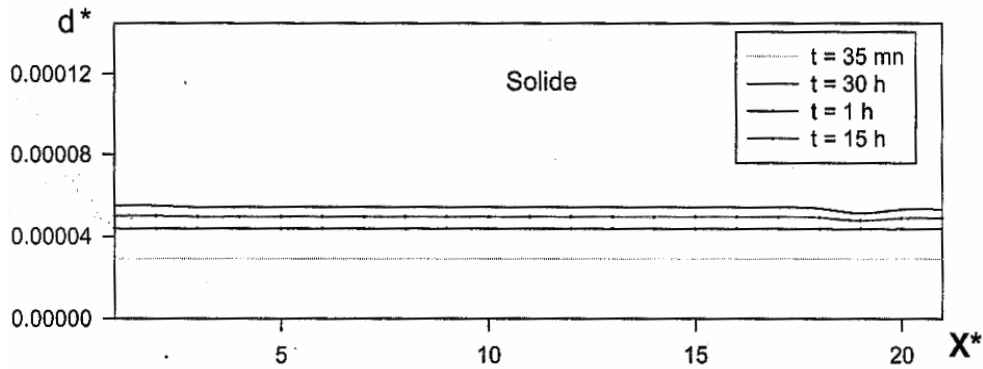


Fig. 3: Evolution du front de fusion

La figure 3 représente la courbe d'évolution de front de fusion au cours du temps  $t$ . Pendant le régime conductif, le flux de chaleur est uniforme et le front de fusion demeure droit et parallèle à la paroi inférieure de la cavité et on ne détecte aucun écoulement dans la phase liquide. Les couches de fluides adjacentes au front de fusion sont les plus froides et les plus denses et se situent au-dessus des couches plus chaudes et plus légères. Au fur et à mesure que le front de fusion progresse, cette stratification devient de plus en plus instable, de sorte que, la moindre perturbation dynamique ou thermique initie la convection naturelle. Cet écoulement convectif a pour effet en premier lieu de déformer les isothermes puis en deuxième lieu l'interface.

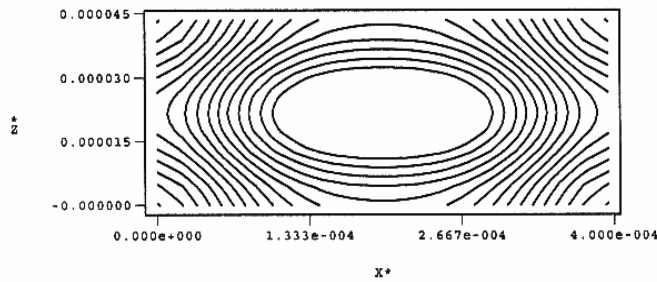


Fig. 4: Lignes de courant

On constate également que le gradient de la température au niveau de l'interface est faible, ce qui nous montre que le flux de chaleur est reçu principalement par la phase solide transmis par la convection. Par contre le gradient de la température dans la matrice solide devient important puisque son épaisseur a diminué au cours du temps à cause de l'évolution du front de fusion vers le haut.

Le profil de température dans la matrice solide est linéaire ce qui nous indique la stationnarité de l'interface. Le flux transmis par la phase liquide est égal à celui reçu par la matrice solide puisque la vitesse du front de fusion est nulle.

L'examen des lignes de courants de la figure 4 montre que l'écoulement est unicellulaire. La fusion se fait plus rapidement au voisinage des parois verticales de la cavité où la couche limite est moins visible.

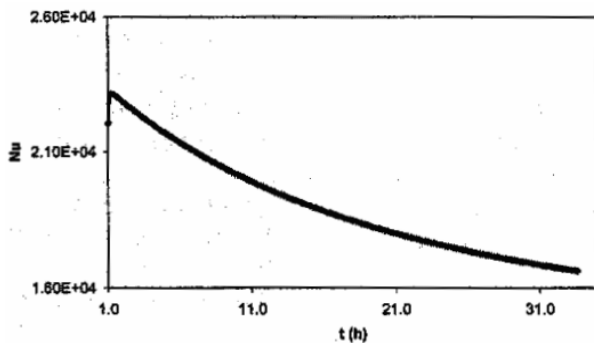


Fig. 5: Nusselt liquide

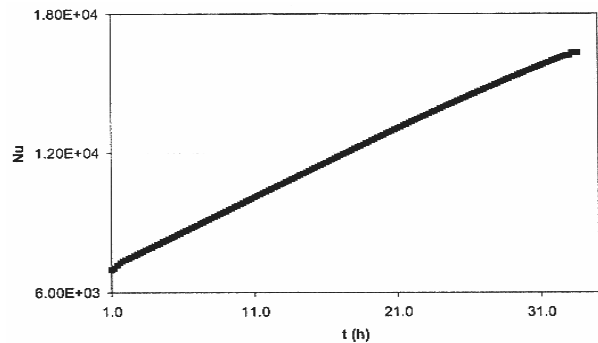


Fig. 6: Nusselt solide

Les figures 5 et 6 représentent l'évolution du nombre de Nusselt pour les deux phases liquide et solide durant le régime convectif. On remarque que le nombre de Nusselt liquide sur la figure 5 augmente jusqu'à atteindre son maximum au voisinage de 1 heure, ce qui nous indique que le transfert de chaleur se fait d'avantage par convection dans la première heure pour diminuer au cours du temps.

Par contre, le nombre de Nusselt solide dans la figure 6, augmente au cours du temps. Ce qui nous montre que le transfert de chaleur se fait d'avantage par convection au niveau de l'interface. Cette progression va atteindre une valeur stable proche de celle du Nusselt liquide, ce qui confirme la stationnarité de l'interface et la compensation dans la matrice solide des flux reçus par l'interface transmis à la paroi supérieure.

#### 4. CONCLUSION

Le modèle numérique qu'on a présenté pour la configuration cartésienne, nous a permis de surmonter le problème du couplage dynamique thermique dans la phase liquide, de localiser, au cours du temps, le front de fusion, et d'évaluer le mode de transfert thermique qui gère le processus de fusion. Les résultats obtenus, sont satisfaisants et permettent de comparer différents matériaux à changement de phase.

#### NOMENCLATURE

<b>Symboles</b>		$\nu$	Viscosité cinématique ( $\text{kgms}^{-1}$ )
A	Rapport de forme	$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )
$C_p$	Chaleur massique ( $\text{J/kg}^\circ\text{C}$ )	$\Psi$	Fonction de courant ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
H	Hauteur de la matrice (m)	$\omega$	Vorticité ( $\text{s}^{-1}$ )
K	Conductivité thermique ( $\text{W/m}^\circ\text{C}$ )	<b>Nombres adimensionnels</b>	
L	Longueur de la matrice	Pr	Nombre de Prandtl
$L_f$	Chaleur latente de fusion ( $\text{J/kg}$ )	Ra	Nombre de Rayleigh
T	Température ( $^\circ\text{C}$ )	Ste	Nombre de Stefan
t	Temps (s)	<b>Indices</b>	
x, z	Coordonnées spatiales (m)	0	Paroi supérieure
u, v	Vitesses (m/s)	f	Fusion
<b>Lettres grecques</b>		l	Liquide
$\alpha$	Diffusivité thermique ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	p	Paroi inférieure
$\beta$	Coef. d'expansion thermique ( $\text{K}^{-1}$ )	s	Solide
$\delta$	Épaisseur couche liquide (m)		

#### REFERENCES

- [1] Séminaire Thermique et sa Modélisation, La Baule, Mai 1982, Organisé par le CNRS et le Ministère de la Recherche et de la Technologie.
- [2] Revue de l'Electricité et du Gaz.
- [3] York, Document Technique.
- [4] Cristopia, Document Technique.
- [5] H. Rieger, U. Projahn and H. Beer, 'Analysis of the Heat Transport Mechanism During Melting Around a Horizontal Circular Cylinder', Int. J. Heat Mass Transfer., 25 (1), pp. 137-147, 1982..
- [6] K. Sasaguchi, K. Kusano and R. Viskanta, 'A Numerical Analysis of Solid - Liquid Phase Change Heat Transfer Around a Single and Two Horizontal Vertically Spaced Cylinders in a Rectangular Cavity', Int. J. Heat Mass Transfer., 40 (6), pp. 1343-1354, 1997.
- [7] M. Pru'Homme, T. Hung Nguyen et Y.K. Wu, 'Simulation Numérique de la Fusion à l'Intérieur d'un Cylindre Adiabatique Chauffé par le Bas', Int. J. Heat Mass Transfer., 34 (9), pp. 2275-2286, 1991.
- [8] C.F. Hsu, E.M. Sparrow and S.V. Patankar, 'Numerical Solution of Moving Boundary Problems by Boundary Immobilisation and a Control- Volume- Based Finite- Difference Scheme', Int. J. Heat Mass Transfer., 24 (8), pp. 1335-1343, 1981.
- [9] C. Benard, D. Gobin and A. Zanoli, 'Moving Boundary Problem : Heat Conduction in the Solid Phase of Phase- Change Materiel During Melting Driven by Naturel Convection in the Liquid', Int. J. Heat Mass Transfer., 29 (11), pp. 1669-1681, 1981.
- [10] J.P. Bedecarrats et J.P. Dumas, 'Etude de la Cristallisation de Nodules Contenant un Matériau à Changement de Phase en vue du Stockage par Chaleur Latente', Int. J. Heat Mass Transfer., 40 (1), pp. 149-147, 1996.